Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas
Septiembre - Diciembre 2003

Nombre: ____________________________

Carnet: _______________ Sección: _____

MA-1123 DE HONOR—Segundo parcial , 2003 —

Cada ejercicio vale 10 puntos. Justifique sus afirmaciones.
Se corregirá sobre 4 ejercicios elegidos por usted.

1. Sea $M \in M_n(\mathbb{R})$. Demuestre que si M es antisimétrica $(M^t = -M)$ entonces $1+M$ y $1-M$ son inversibles. Pruebe también que $(1+M)(1-M)^{-1}$ es ortogonal y que su determinante es $+1$.

2. Considere la matriz
$$M = \begin{pmatrix} -16 & 0 & 30 \\ 3 & -1 & -5 \\ -9 & 0 & 17 \end{pmatrix}$$
   a) Calcule sus autovalores.
   b) ¿Hay una base de $\mathbb{R}^3$ donde M es triangular superior? En caso afirmativo, hállela.

3. Considere el espacio vectorial P_3 de los polinomios
$$P_3 = \{p(x)/p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 / \alpha_0, \ldots, \alpha_3 \in \mathbb{R}\}.$$
   y la forma lineal
$$f : P_3 \to \mathbb{R}\,, \quad f(p) = p(1).$$
   Defina para $p, q \in P_3$,
$$\langle\, p, q \,\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\, dx$$
   a) Pruebe que $\langle\ ,\ \rangle$ es un producto interno en P_3.
   b) ¿Existe un polinomio $q_0 \in P_3$ tal que para todo $p \in P_3$, $f(p) = \langle\, p, q_0 \,\rangle$? En caso afirmativo, encuentre q_0.

4. Considere la forma bilineal
$$B(\xi, \eta) \;=\; 2\xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \xi_3\eta_3 + \xi_1\eta_2 - \xi_1\eta_3 + \xi_2\eta_1 - \xi_3\eta_1$$
   para vectores $\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}, \ \eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix}$ en $\mathbb{R}^3$.

   a) Demuestre que se trata de un producto escalar.

b) Demuestre que hay una base α, β, γ de $\mathbb{R}^3$ que es simultáneamente ortogonal para el producto escalar canónico de $\mathbb{R}^3$ y para la forma B.

5. Sea B una forma bilineal simétrica y positiva (aunque no necesariamente definida positiva) en el espacio vectorial real E. Demuestre que si para algún $x, B(x,x) = 0,$ entonces $B(x,y) = 0$ para todo $y \in E$.
Sugerencia: Demuestre que B satisface una desigualdad de Cauchy-Schwarz, y use este resultado.